

PROBLEMATIKA MODELOVÁNÍ ELASTOHYDRODYNAMICKÉHO MAZÁNÍ S VYUŽITÍM MKP

R. Brhlík, I. Ficza, D. Nečas, I. Krupka

Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav konstruování

Abstrakt

Tato práce se zabývá aplikací metody konečných prvků při simulacích elasto-hydrodynamického mazání. Pro výpočet je použit software COMSOL, přičemž je detailně analyzován nový přístup s využitím modulu Thin-Film Flow, kdy jsou zároveň popsány některé jeho nedostatky. Pozornost je zaměřena zejména na kavitační podmínku a stabilizaci Reynoldsovy rovnice. Dále jsou popsány limitace použité závislosti hustoty maziva na změně tlaku a nevhodnost zavádění rovnice silové rovnováhy přes rozhraní *global equation*. Jsou zmíněny také problémy s diskretizačním řádem a s příliš velkou náchylností výpočetního modelu na počáteční aproximaci přiblížení těles.

1 Úvod

Při elasto-hydrodynamickém (EHD) mazání dochází k oddělení dvou nekonformních povrchů tenkým mazacím filmem, charakteristické jsou elastické deformace povrchů. Zároveň se také mění s tlakem viskozita a hustota maziva [1]. EHD mazání byla v průběhu let věnována značná část teoretických i experimentálních prací, postupně se začaly objevovat i první numerické simulace. Jejich rozvoj byl urychlen rozvojem výpočetní techniky, většina z nich však staví na speciálně vytvořených programech. S rozšířením možností komerčně dostupných MKP software se nabízí využití těchto programů při řešení kontaktních úloh a vyloučení nutnosti hlubokých znalostí např. z oblasti programování. Obecně také stále častěji zaznívá požadavek numerického podložení výsledků experimentálních prací.

První komplexní výpočet kontaktní úlohy v software COMSOL byl předložen na COMSOL Conference 2009 v Miláně [2]. Jedná se o simulaci bodového EHD kontaktu koule a desky. Reynoldsova rovnice popisující proudění maziva v kontaktu je do modelu zavedena pomocí PDE modulu, který umožňuje implementaci parciálních diferenciálních rovnic. Významný posun pak znamenala v roce 2012 práce Tana a kol. [3]. Je zde porovnáváno několik přístupů k výpočtu deformace: pod zkratkou IA víceúrovňová vícenásobná integrace a s ní tzv. *single domain full-system approach* (SD-FSA), resp. *double domain full-system approach* (DD-FSA). Byl vytvořen statický model pro bodový i liniový kontakt dvou těles, transientní výpočtový model pak zahrnoval pouze liniový kontakt. Ukázalo se, že všechny metody vedly k relevantním výsledkům, avšak zejména pro bodový kontakt vykazovaly ve srovnání s liniovým odlišnou časovou náročnost výpočtu. V roce 2014 byla vydána práce Szávaiho a Kovácse [4]. Autoři uváděli výpočet liniového kontaktu, avšak kvůli numerické nestabilitě se nepodařilo dosáhnout konvergence řešení. Vypovídající hodnota této práce tedy tkvěla především spíše v informaci o zjevné náchylnosti numerického výpočtu na přesnost jednotlivých parametrů. Poslední významný posun v řešení problematiky EHD mazání v software COMSOL přinesla nejnovější práce Weschty a kol. publikovaná na konci roku 2014 [5]. S využitím modelu z literatury [2] byla provedena simulace kontaktu s upravenou topologií povrchu.

Program COMSOL obsahuje od verze 5.0 v rámci knihovny Fluid Flow modul Thin-Film Flow, do kterého jsou přímo zavedeny Reynoldsova rovnice (1.1) i rovnice elastických deformací (1.3) a který je dle popisu určen přímo pro simulace mazání, elasto-hydrodynamického kontaktu a tlumení při uvažování tenkého mazacího filmu. Jelikož prostředí tohoto modulu je relativně intuitivní a dosud nebyla publikována žádná práce s jeho využitím, byl sestaven výpočtový model, ve kterém byl tento modul aplikován. Spolu s modulem Solid Mechanics byl vytvořen 3D model bodového kontaktu a 2D model liniového kontaktu. U bodového kontaktu bylo využito okrajových podmínek definujících symetrii. Při určování výchozích hodnot jednotlivých parametrů výpočtu bylo využito údajů získaných na základě dostupné literatury, tedy [2], [3] a [4]. Z výsledků, které byly následně analyzovány, vyplynuly určité limitace modulu Thin-Film Flow. Tyto problémy jsou shrnuty v tomto článku.

2 Metody - rovnice

Rozložení tlaku v kapalinové mazací vrstvě při newtonském chování maziva popisuje Reynoldsova rovnice, kterou lze v obecném nestacionárním tvaru psát jako [6]:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho h^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\rho h^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial y} \right) - u \frac{\partial(\rho h)}{\partial x} - \frac{\partial(\rho h)}{\partial t} = 0 \quad (x, y, t) \in \Omega_1 \quad (1.1)$$

a

$$p(x, y, t) \geq 0 \quad (x, y, t) \in \Omega_2 \quad (1.2)$$

Charakteristickým znakem EHD mazání je elastická deformace povrchu těles. Ta má za následek změnu tvaru mezery, kterou proudí mazivo, a tím také tloušťky mazacího filmu. Rovnici popisující tento jev, lze zapsat v obecném nestacionárním tvaru [6]:

$$h(x, y, t) = h_0(t) + \frac{x^2}{2R_x} + \frac{y^2}{2R_y} + d(x, y, t) + \frac{2}{\pi E'} \iint_{\Omega} \frac{p(x', y', t) dx' dy'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}} \quad (1.3)$$

Na celé oblasti řešení musí být v silové rovnováze výslednice tlaku v mazací vrstvě $p(x, y, t)$ a vnější zatížení kontaktu w . Rovnice rovnováhy pak ve výpočtu slouží jako kontrola hodnot tloušťky vrstvy maziva i tlaku. Lze ji zapsat ve tvaru [6]:

$$w = \iint_{\Omega} p(x', y', t) dx' dy' \quad (1.4)$$

Tlakově-viskózní chování maziva lze popsat například pomocí Barusova vztahu [7]:

$$\eta(p) = \eta_0 \exp(\alpha p) \quad (1.5)$$

Při řešení EHD mazání se však využívá složitější a přesnější Roelandsův vztah [8]:

$$\eta(p) = \eta_0 \exp \left((\ln(\eta_0) + 9,67) \left(-1 + \left(1 + \frac{p}{p_0} \right)^z \right) \right) \quad (1.6)$$

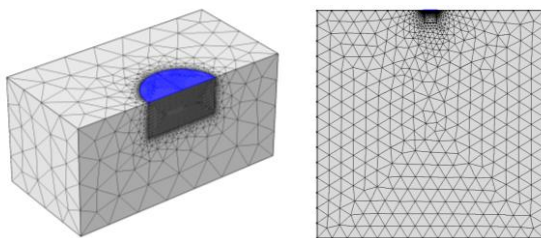
kde z je tlakově-viskózní index, který nabývá obvykle hodnoty 0,6 [9] a p_0 konstantní hodnota tlaku o velikosti $1,96 \cdot 10^8$ Pa [9].

V EHD kontaktu dvou nekonformních povrchů nastávají vysoké tlaky, proto je nutné uvažovat vliv tlaku na hustotu maziva. Dowson a Higginson stanovili pro tuto závislost vztah ve tvaru [10]:

$$\rho(p) = \rho_0 \frac{5,9 \cdot 10^8 + 1,34 p}{5,9 \cdot 10^8 + p} \quad (1.7)$$

3 Výsledky

S použitím modulů Thin-Film Flow a Solid Mechanics byl vytvořen 3D model bodového kontaktu a 2D model liniového kontaktu (obr. 1.1).



Obr. 1.1 3D model bodového kontaktu a 2D model liniového kontaktu

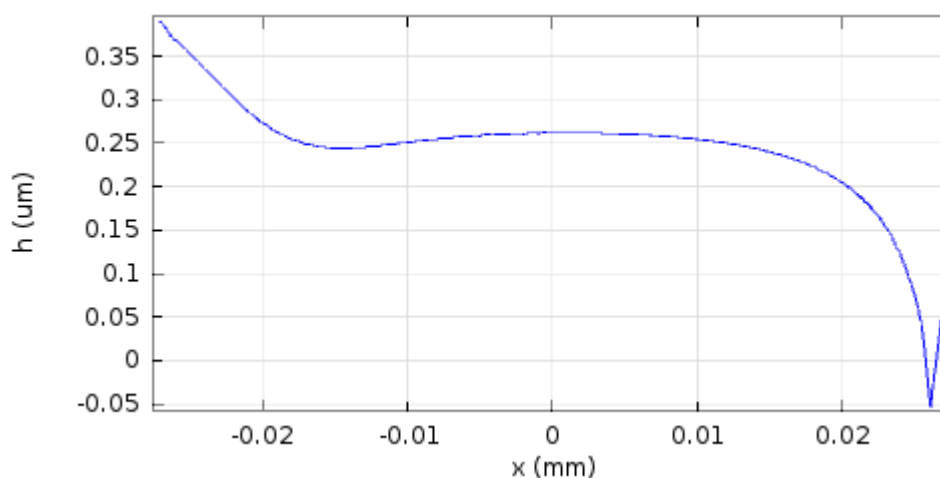
Při stanovování počátečních hodnot jednotlivých veličin bylo využito publikované práce [4]. Všechny rovnice byly do modelu zaváděny ve stacionárním tvaru.

U modelu bodového kontaktu nebylo dosaženo výsledků, které by měly relevantní vypovídající hodnotu, zejména kvůli výpočtové náročnosti 3D modelu.

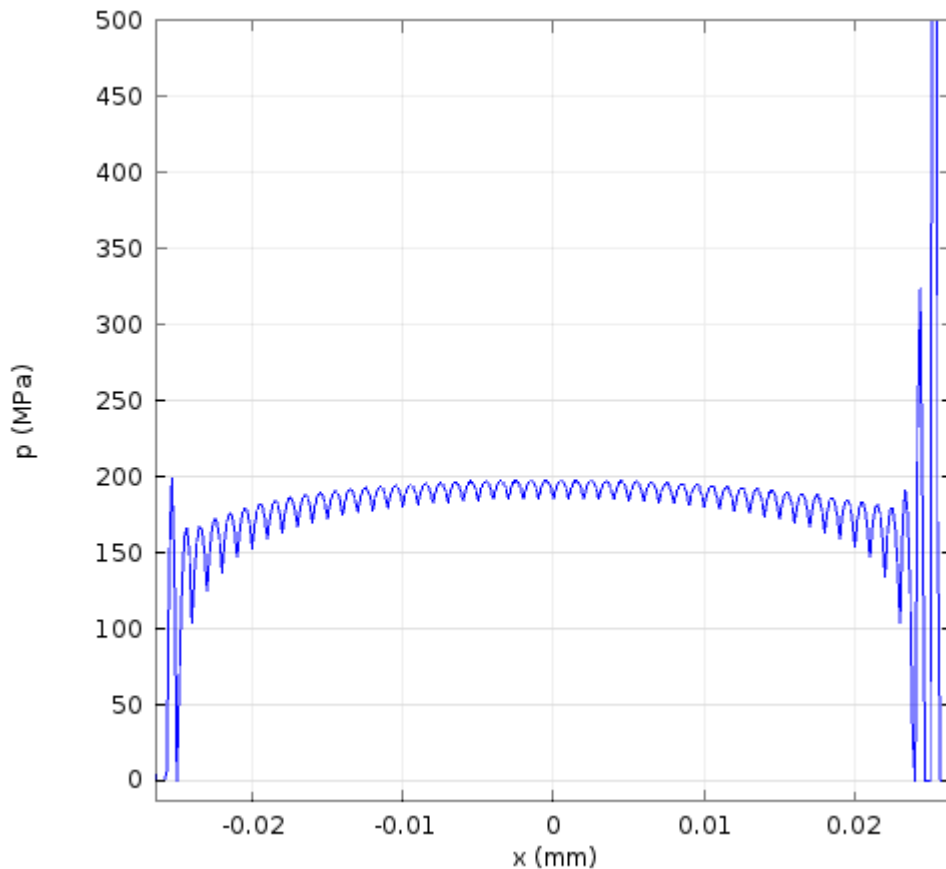
Pro 2D model liniového kontaktu byl získán průběh tloušťky maziva (obr 1.2) i tlaku (obr 1.3) při použití parametrů uvedených v tab. 1 (čerpány z [4]). Rovnice pro výpočet hustoty v závislosti na tlaku byla s využitím rozhraní *equation view* nahrazena vztahem dle Dowsona a Higginsona (1.7). Správnost hodnoty tlaku v centrální části kontaktu byla verifikována s využitím vztahu vycházejícího z Hertzovy teorie. Stanovená hodnota maximálního Hertzova tlaku je uvedena v tab. 1.

TAB. 1 MODUL THIN-FILM FLOW; 2D MODEL LINIOVÉHO KONTAKTU - POČÁTEČNÍ HODNOTY PARAMETRŮ

veličina	označení	počáteční hodnota
zatížení	F_{wall} (N)	500
redukovaný poloměr křivosti	R_x (mm)	30,031035
rychlost pohybu povrchu desky	v_b ($m \cdot s^{-1}$)	1,588530
rychlost pohybu povrchu válce	v_w ($m \cdot s^{-1}$)	0
počáteční aproximace přiblížení kontaktních povrchů	h_0 (μm)	0,228127
viskozita maziva	μ_0 ($Pa \cdot s$)	$1,539 \cdot 10^{-2}$
hustota maziva	ρ ($kg \cdot m^{-3}$)	858,44
modul pružnosti desky	E (Pa)	$109,9 \cdot 10^9$
Poissonův poměr desky	ν (-)	0,285
tlakově-viskózní index	z (-)	0,641910
šířka kavitačního přechodu	Δp_{sw} (MPa)	1,0
Hertzův tlak	p_h (MPa)	196,1
mesh – free triangular – 4417 prvků		

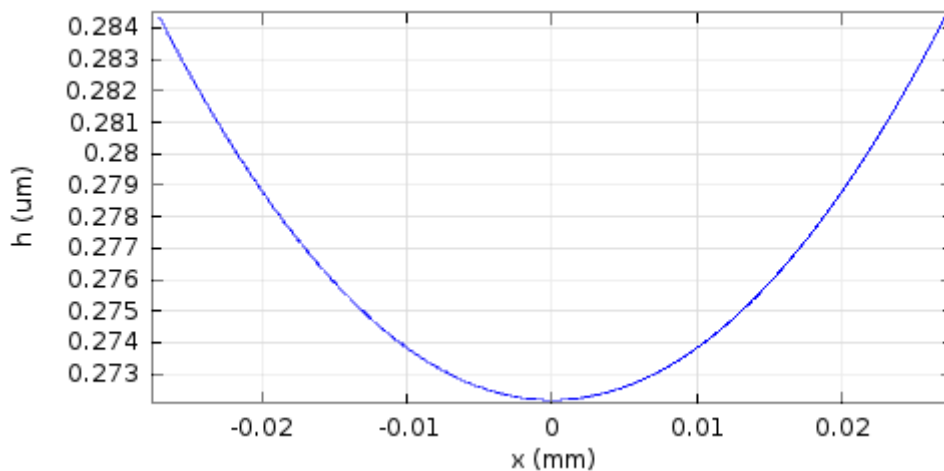


Obr. 1.2 Průběh tloušťky maziva h v liniovém kontaktu; 2D model; modul Thin-Film Flow; velikost parametrů výpočtu dle tab. 1

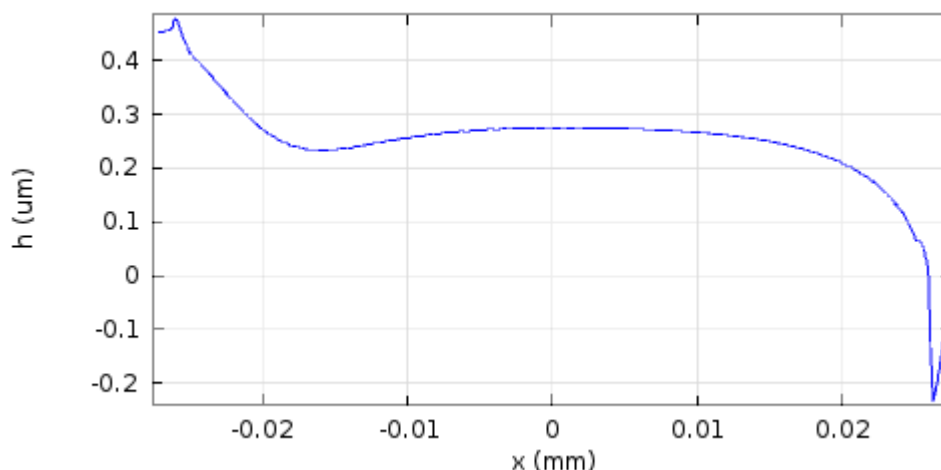


Obr. 1.3 Průběh tlaku p v liniovém kontaktu; 2D model; modul Thin-Film Flow; velikost parametrů výpočtu dle tab. 1

Výpočtový model 2D liniového kontaktu s využitím modulu Thin-Film Flow se vyznačoval značnou numerickou nestabilitou a náchylností na přesné určení počátečních parametrů. V rámci analýzy tohoto problému byl zkoumán vliv počáteční aproximace přiblížení kontaktních povrchů h_0 na vypočtenou hodnotu tloušťky maziva h . Výpočet je totiž z podstaty Newton-Raphsonovy metody na tuto hodnotu citlivý. Hodnota přiblížení kontaktních povrchů h_0 byla měněna o $\pm 0,01 \mu\text{m}$. Výsledky jsou shrnuty na grafech na obr. 1.4 a 1.5. Již na první pohled je zcela patrné, že malá změna počátečního přiblížení těles vedla k nesprávným výsledkům.



Obr. 1.4 Průběh tloušťky maziva h v liniovém kontaktu; 2D model; modul Thin-Film Flow; velikost parametrů výpočtu dle tab. 1; $h_0 = 0,218127 \mu\text{m}$



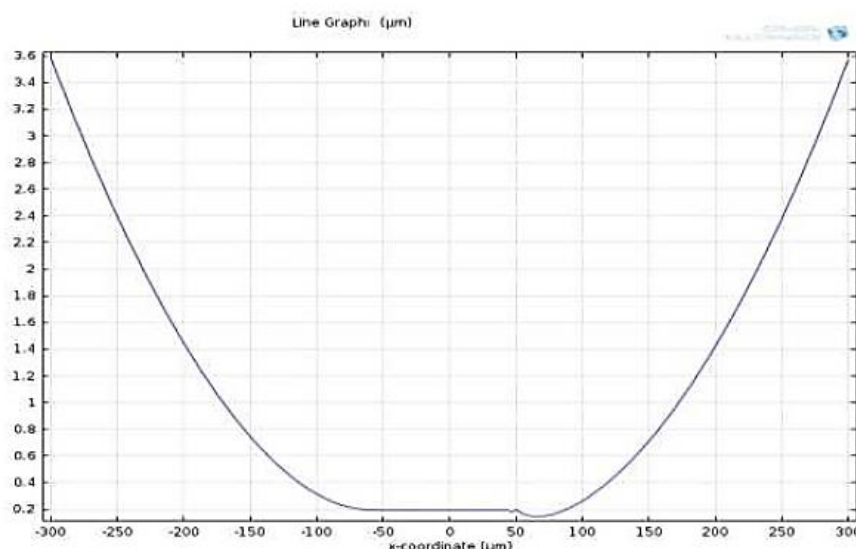
Obr. 1.5 Průběh tloušťky maziva h v liniovém kontaktu; 2D model; modul Thin-Film Flow; velikost parametrů výpočtu dle tab. 1; $h_0 = 0,238127\mu\text{m}$

4 Diskuze

Výpočet s použitím modulu Thin-Film Flow se za všech okolností vyznačoval značnou numerickou nestabilitou a ke konvergenci docházelo s celkovou diskretizační chybou v řádu jednotek.

3D model bodového kontaktu nezkonvergoval k výsledkům s přijatelnou vypovídací hodnotou. Vyznačoval se také velmi vysokou výpočtovou náročností.

Při tvorbě 2D modelu liniového kontaktu se podařilo získat hodnoty uvedené v grafech na obr. 1.2 a 1.3. Hodnota maximálního Hertzova tlaku souhlasí s vypočtenou hodnotou (tab. 1). Hodnota tloušťky maziva (graf na obr. 1.2) se blíží hodnotám určeným v práci [4], ze které byly hodnoty vstupních parametrů čerpány (graf na obr. 1.6). Simulací byla stanovena centrální tloušťka maziva přibližně $0,27\mu\text{m}$ (graf na obr. 1.2), v publikaci [4] dosahuje centrální tloušťka mazacího filmu přibližně $0,20\mu\text{m}$ (graf na obr. 1.6).



Obr. 1.6 Průběh tloušťky maziva h v liniovém kontaktu, velikost parametrů výpočtu dle tab. 1 [4]

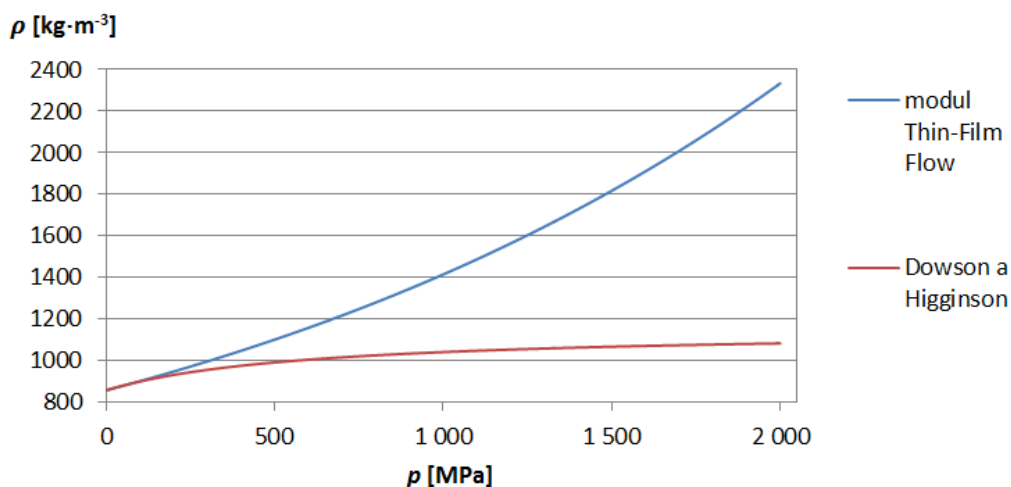
Zejména v grafu průběhu tlaku (graf na obr. 1.3) jsou patrné značné oscilace, především na výstupu z kontaktu. Tyto oscilace mají za následek ostrý hrot v minimu tloušťky maziva (graf na obr. 1.2), který zasahuje až do záporných hodnot. Z tohoto důvodu nebyla minimální tloušťka mazacího filmu správně určena. Tyto oscilace a numerickou nestabilitu má za následek zřejmě hned několik skutečností.

4.1 Kavítace – spínací funkce

Zásadním problémem modulu Thin-Film Flow je kavitační algoritmus vycházející z modifikované verze Elrodova algoritmu [11]. Důkladnějším zkoumáním tohoto algoritmu bylo zjištěno, že je vhodný pouze pro hydrodynamické mazání. Jsou-li totiž elastické deformace těles významné, způsobuje tento kavitační algoritmus nestabilitu výpočtu (zmněno také v [11]). Ačkoliv je modul Thin-Film Flow dle svého popisu určen i pro EHD simulace, tento kavitační algoritmus jej činí k tomu nezpůsobilým. Kavitační podmínku také nelze v modulu Thin-Film Flow modifikovat na penalty faktor [12] obvykle užívaný u EHD simulací.

4.2 Závislost hustoty maziva na změně tlaku

V modulu Thin-Film Flow je přímo zavedena rovnice pro změnu hustoty v závislosti na tlaku. Tento vztah je ale odlišný od vztahu definovaného Dowsonem a Higginsonem [10] (1.7). Na grafu na obr. 1.7 je zobrazeno srovnání obou těchto vztahů pro hustotu maziva z tab. 1.



Obr. 1.7 Srovnání hustoty maziva ρ v závislosti na tlaku p pro vztah dle Dowsona a Higginsona [4] (1.7) a vztah implementovaný v modulu Thin-Film Flow, počáteční hustota $\rho_0 = 858,44 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ (dle tab. 1), $\beta = 5 \cdot 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$

Je zcela zřejmé, že rovnice vykazuje rozdílné hodnoty hustoty maziva a přispívá tak k nesprávným výsledkům simulací. Tuto rovnici lze v modulu Thin-Film Flow změnit přes *equation view*.

4.3 Zadávání rovnice rovnováhy

Aby byla hodnota tlaku kontrolována v každém iteračním kroku výpočtu, musí být rovnice silové rovnováhy (1.4) zadávána při použití modulu Thin-Film Flow pomocí rozhraní *global equation* jako:

$$f(p) = 0 \quad (4.1)$$

Tato rovnost ale způsobuje výskyt nuly na diagonále v matici při numerickém řešení. Krátce je tento problém zmiňován již v *CFD User guide* [11]. Z tohoto důvodu nelze použít iterativní multigradní řešič a je nutné přistoupit k použití přímého řešiče. Zásadně negativně je tak ovlivněna rychlost celého výpočtu i nároky na použitý hardware.

4.4 Počáteční aproximace přiblížení těles

Použití Newton-Raphsonovy metody vyžaduje dobrou počáteční aproximaci přiblížení kontaktních povrchů h_0 . V modulu Thin-Film Flow je tato hodnota zadávána jako součet vzdáleností jednotlivých kontaktních povrchů od referenční roviny. Z grafů na obr. 1.4 a 1.5 jednoznačně vyplývá velmi vysoká náchylnost výpočtu na velikost této hodnoty. Zmenšením hodnoty h_0 o $0,01 \mu\text{m}$ se z průběhu tloušťky maziva vytratilo globální minimum u výstupu maziva z kontaktu (obr. 1.4). Zvětšením hodnoty h_0 o $0,01 \mu\text{m}$ došlo k posunutí nežádoucího ostrého hrotu v místě lokálního minima

ještě hlouběji do záporných hodnot (obr. 1.5). V práci [3] je počáteční hodnota přiblížení těles udávána v bezrozměrném tvaru a zároveň je konstatováno, že její změna v intervalu $\langle -0,5; 0,5 \rangle$ má za následek jen velmi malou změnu konvergence. Výsledky prezentované na grafech na obr. 1.4 a 1.5 jsou zcela v rozporu s tímto tvrzením. Na jejich základě lze usuzovat, že rovnice tloušťky mazacího filmu (1.3) nemusí být v modulu Thin-Film Flow implementována v korektním tvaru, který by umožňoval spolehlivý výpočet EHD mazání. Tuto rovnici, stejně jako Reynoldsovu rovnici (1.1) nelze také v modulu Thin-Film Flow dostatečně modifikovat, např. na tvar (1.3).

4.5 Stabilizace

Protože je Reynoldsova rovnice pro vysoké tlaky nestabilní, je nutné zavádět do výpočtu stabilizaci, která vede k eliminaci oscilací. V modulu Thin-Film Flow je zavedena možnost stabilizace pomocí isotropické difuze, resp. ladicího parametru [13]. Jeho hodnota byla měněna nejprve dle [3] v intervalu $\langle 10^{-5}; 10^{-7} \rangle$, avšak získané hodnoty tlaku a tloušťky mazacího filmu byly nesmyslné. Poté byla jeho velikost zmenšována až do dosažení hodnoty 1 uvedené v tab. 1, kdy bylo dosaženo prezentovaných výsledků. Na jejich základě lze usuzovat, že stabilizační člen nemusí být v modulu Thin-Film Flow implementován vhodným způsobem. Z důvodu nedostatku informací v referenčním manuálu však nelze přesně identifikovat příslušný problém.

4.6 Diskretizace tlaku

Řád diskretizace má vliv na náročnost výpočtu i na jeho přesnost. Obecně platí, že čím hrubší je konečnoprvková síť, tím vyšší řád diskretizace je pro dosažení správných výsledků potřeba. S použitím hrubé konečnoprvkové sítě v kombinaci s nízkým řádem diskretizace dochází k oscilacím. Modul Thin-Film Flow umožňuje pouze diskretizaci maximálně čtvrtého řádu. Zároveň je EHD simulace s tímto modulem limitována nutností použití přímého řešiče, kdy je nutné kvůli snížení výpočetních nároků a času volit hrubší konečnoprvkovou síť. Na základě těchto faktů lze usuzovat, že omezení diskretizace na čtvrtý řád může mít také jistý negativní vliv např. na oscilace ve výpočtu, viz grafy na obr. 1.2 a 1.3.

5 Závěr

Jelikož software COMSOL disponuje od verze 5.0 samostatným modulem Thin-Film Flow, byl nejprve vytvořen 2D liniový EHD kontakt s využitím tohoto modulu. Poté byl analyzován průběh tlaku a tloušťky maziva pro liniový kontakt, jehož parametry byly převzaty z dříve publikované práce [4] a následně porovnány s výsledky v této publikaci. Podařilo se stanovit odpovídající průběh tlaku (obr. 1.2), stejně tak byla dosažena velmi dobrá korelace kontaktního tlaku v centrální oblasti kontaktu s predikovanou hodnotou dle Hertzovy teorie, viz tab. 1 a obr. 1.2. Výsledky však vykazují značné oscilace, zejména v oblasti výstupu maziva z kontaktu. Centrální tloušťka maziva dosahovala podobných hodnot jako v publikaci [4], avšak v globálním minimu se kvůli zmíněným oscilacím objevuje ostré minimum zasahující až do záporných hodnot. Tyto skutečnosti byly analyzovány a bylo zjištěno několik závažných nedostatků modulu Thin-Film Flow. Zásadní vliv na výsledky má zřejmě nevhodně formulovaná kavitační podmínka. V modelu je také implementován vztah pro závislost hustoty maziva na tlaku, který vykazuje rozdílné hodnoty oproti klasické rovnici (1.7) definované Dowsonem a Higginsonem. Nevhodný způsob zavádění rovnice rovnováhy (1.4) vylučuje použití rychlého multigradního iterativního řešiče a de facto znemožňuje efektivní výpočet zejména v případě 3D bodového kontaktu. Model vytvořený v modulu Thin-Film Flow také vykazuje až příliš velkou citlivost na velikost počáteční aproximace přiblížení povrchů těles, což vede k domněnce nevhodně implementované rovnice elastických deformací. Neefektivní stabilizace a omezený řád diskretizace také přispívají k neefektivnímu řešení problematiky EHD mazání s využitím modulu Thin-Film Flow. Zmíněné nedostatky modulu nebylo možné predikovat, neboť dosud nebyla přímo k této problematice vydána žádná publikace.

Seznam zkratk a symbolů

α (Pa^{-1})	- tlakově-viskózní koeficient
η ($\text{Pa} \cdot \text{s}$)	- dynamická viskozita maziva
η_0 ($\text{Pa} \cdot \text{s}$)	- dynamická viskozita maziva při atmosférickém tlaku
ρ ($\text{kg} \cdot \text{m}^3$)	- hustota maziva

ρ_0 (kg · m ³)	- počáteční hustota maziva
E' (MPa)	- ekvivalentní Youngův modul
w (N)	- vnější silové zatížení
h (μm)	- tloušťka maziva v kontaktu
h_0 (μm)	- počáteční aproximace přiblížení povrchů těles
p (MPa)	- kontaktní tlak
p_h (MPa)	- Hertzův tlak pro jednotlivý typ kontaktu
P_f (—)	- penalty faktor
R_x, R_y (mm)	- redukovaný poloměr křivosti těles pro směr osy x a y
t (s)	- čas
u (m · s ⁻¹)	- rychlost pohybu povrchu kontaktního tělesa
x, y (mm)	- kartézské souřadnice

Reference

- [1] ESFAHANIAN, M. a B. J. HAMROCK. Fluid-Film Lubrication Regimes Revisited. *Tribology Transactions* [online]. 1991, 34(4): 628-632 [cit. 2015-04-1]. DOI: 10.1080/10402009108982081.
- [2] FILLOT, Nicolas; DOKI-THONON, Thomas; HABCHI, Wassim. The Full-System Approach for Elastohydrodynamic Lubrication. 2009. Dostupné z: <http://www.comsol.kr/papers/6966/download/Fillot.pdf>
- [3] TAN, X., C. E. GOODYER, P. K. JIMACK, R. I. TAYLOR a M. A. WALKLEY. Computational approaches for modelling elastohydrodynamic lubrication using multiphysics software. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J: Journal of Engineering Tribology* [online]. 2012-05-14, vol. 226, issue 6, s. 463-480 [cit. 2014-04-07]. DOI: 10.1177/1350650111428028. Dostupné z: <http://pij.sagepub.com/lookup/doi/10.1177/1350650111428028>
- [4] SZÁVAI, S. a S. KOVÁCS. Development of calculating process for elasto-hydrodynamic spot contact by P-FEM. *Design of Machines and structures* [online]. 2014-04-30, vol. 4, issue 1, s. 87–98 [cit. 2015-04-20]. Dostupné z: http://www.matarka.hu/koz/ISSN_1785-6892/vol_4_no1_2014/ISSN_1785-6892_vol_4_no1_2014_087-098.pdf
- [5] WESCHTA, M.; TREMMEL, S.; WARTZACK, S. Simulation of Microstructured Rolling-Sliding Contacts. 2014. Dostupné z: http://www.comsol.com/paper/download/194565/weschta_paper.pdf
- [6] VENNER, C a A LUBRECHT. *Multilevel methods in lubrication*. 1st ed. New York: Elsevier, 2000, xx, 379 p. ISBN 0444505032-
- [7] BARUS, C.: Isothermals, Isopiestic and Isometrics relative to Viscosity. *Am. J. of Science*, 1893, vol. 45, p. 87-96.
- [8] ROELANDS, C.J.A.: Correlational Aspects of the Viscosity-Temperature-Pressure Relationship of Lubricating Oils. *Ph.D. Thesis*, Technical University Delft, Delft, The Netherlands, 1966.

- [9] URBANEC, L.: Numerická simulace elastohydrodynamicky mazaného kruhového kontaktu nehladkých povrchu. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2007. 81 s.
- [10] DOWSON, D., HIGGINSON, G.R.: Elastohydrodynamic Lubrication, The Fundamentals of Roller and Gear Lubrication. *Pergamon Press*, Oxford, Great Britain, 1966.
- [11] COMSOL. *CFD Module User's Guide*. 2014, 624 s.
- [12] WU, S.R. A penalty formulation and numerical approximation of the Reynolds-Hertz problem of elastohydrodynamic lubrication. *International Journal of Engineering Science* [online]. 1986, vol. 24, issue 6, s. 1001-1013 [cit. 2015-03-08]. DOI: 10.1016/0020-7225(86)90032-7.
- [13] HABCHI, W., D. EYHERAMENDY, P. VERGNE a G. MORALES-ESPEJEL. A Full-System Approach of the Elastohydrodynamic Line/Point Contact Problem. *Journal of Tribology* [online]. 2008, vol. 130, issue 2 [cit. 2015-03-08]. DOI: 10.1115/1.2842246.

Ing. Rostislav Brhlík
y133416@stud.fme.vutbr.cz

Ing. Ildikó Ficza
yficza00@stud.fme.vutbr.cz

Ing. David Nečas
necas@fme.vutbr.cz

prof. Ing. Ivan Křupka, Ph.D.
krupka@fme.vutbr.cz