Minikurz optimalizace

Martin Kožíšek, Matouš Lorenc

kozisek@humusoft.cz, lorenc@humusoft.cz

+420 284 011 745, +420 284 011 749

COMSOL Multiphysics®

COMSOL Server™

ELECTRICAL

- AC/DC Module
- RF Module
- Wave Optics Module
- Ray Optics Module
- Plasma Module
- Semiconductor Module
- MEMS Module

STRUCTURAL & ACOUSTICS

- Structural Mechanics Module
- Nonlinear Structural Materials Module
- Geomechanics Module
- Fatigue Module
- Multibody Dynamics Module
- Rotordynamics Module
- Acoustics Module

FLUID & HEAT

- CFD Module
- Mixer Module
- Subsurface Flow Module
- Pipe Flow Module
- Microfluidics Module
- Molecular Flow Module
- Heat Transfer Module

CHEMICAL

- Chemical Reaction Engineering Module
- Batteries & Fuel Cells Module
- Electrodeposition Module
- Corrosion Module
- Electrochemistry Module

MULTIPURPOSE

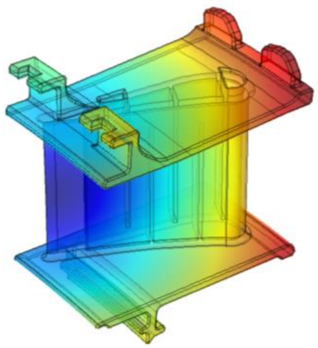
- Optimization Module
- Material Library
- Particle Tracing Module

INTERFACING

- LiveLink™ *for* MATLAB®
- LiveLink™ *for* Excel®
- CAD Import Module
- Design Module
- ECAD Import Module
- LiveLink™ *for* SOLIDWORKS®
- LiveLink™ *for* Inventor®
- LiveLink™ *for* AutoCAD®
- LiveLink™ *for* Revit®
- LiveLink™ *for* PTC® Creo® Parametric™
- LiveLink™ *for* PTC® Pro/ENGINEER®
- LiveLink™ *for* Solid Edge®
- File Import *for* CATIA® V5

Co je optimalizace?

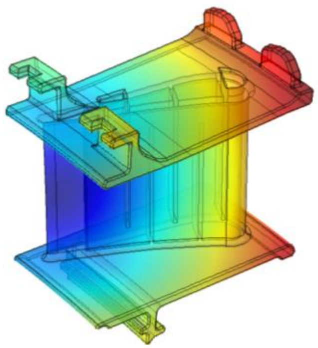
Constrained design variables: χ



$$\boxed{\mathbf{K}(\chi)\mathbf{u} = \mathbf{b}(\chi)}$$

Co je optimalizace?

Constrained design variables: χ



$$\boxed{K(\chi)u = b(\chi)}$$

Návrhové proměnné – χ

- geometrie
- materiál
- rozložení hmoty

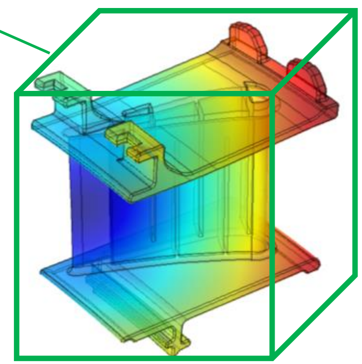
COMSOL

Co je optimalizace?

Návrhový prostor může být omezený omezujícími funkcemi

$\chi_L \leq \chi \leq \chi_R$, $\mathrm{p}(x) \leq 0$

Constrained design variables: χ



$\mathbf{K}(\chi)\mathbf{u} = \mathbf{b}(\chi)$

Návrhové proměnné – χ

- geometrie
- materiál
- rozložení hmoty

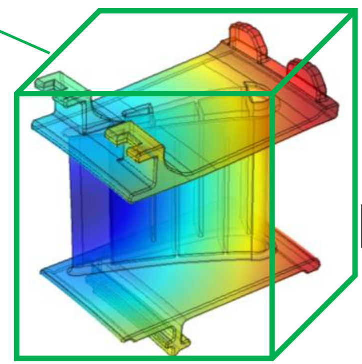
COMSOL

Co je optimalizace?

Návrhový prostor může být omezený omezujícími funkcemi

$$\chi_L \leq \chi \leq \chi_R \,,\ \mathrm{p}(x) \leq 0$$

Constrained design variables: χ



$$\mathbf{K}(\chi)\mathbf{u} = \mathbf{b}(\chi)$$

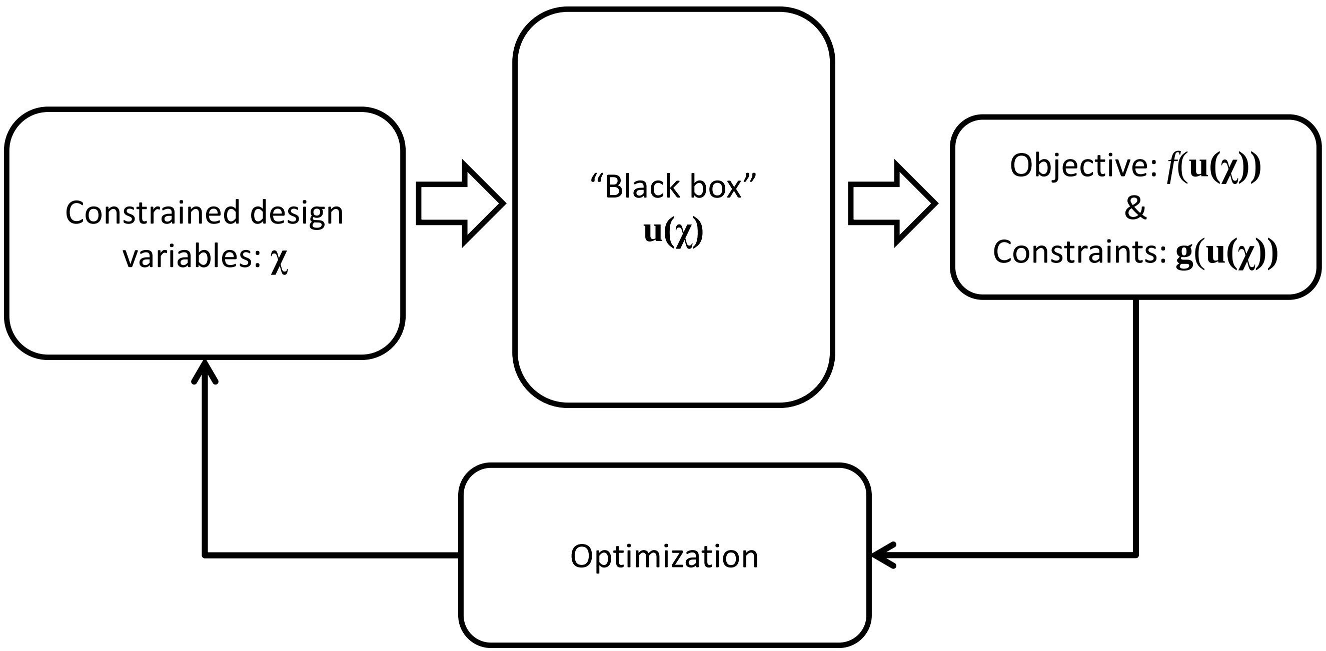
Cílová funkce $f(u(\chi))$,
požadavky na kvalitu $g(u(\chi)) = 0$,
omezení nekvality $h(u(\chi)) \leq 0$.

Návrhové proměnné – χ

- geometrie
- materiál
- rozložení hmoty

Jaké zvolit χ aby tuhost byla nejvyšší?

Co je optimalizace?



Terminologie

$$\min_{\chi \in \Re} \quad f\left(\mathbf{u}(\chi)\right)$$

Objective function, cílová funkce

$$\boldsymbol{\chi}_L \leq \boldsymbol{\chi} \leq \boldsymbol{\chi}_U$$

Simple bounds on the design variables, jednoduché omezení návrhových proměnných

$$\mathbf{p}(\chi) \leq \mathbf{0}$$

Pointwise constraints on the design variables, omezující funkce

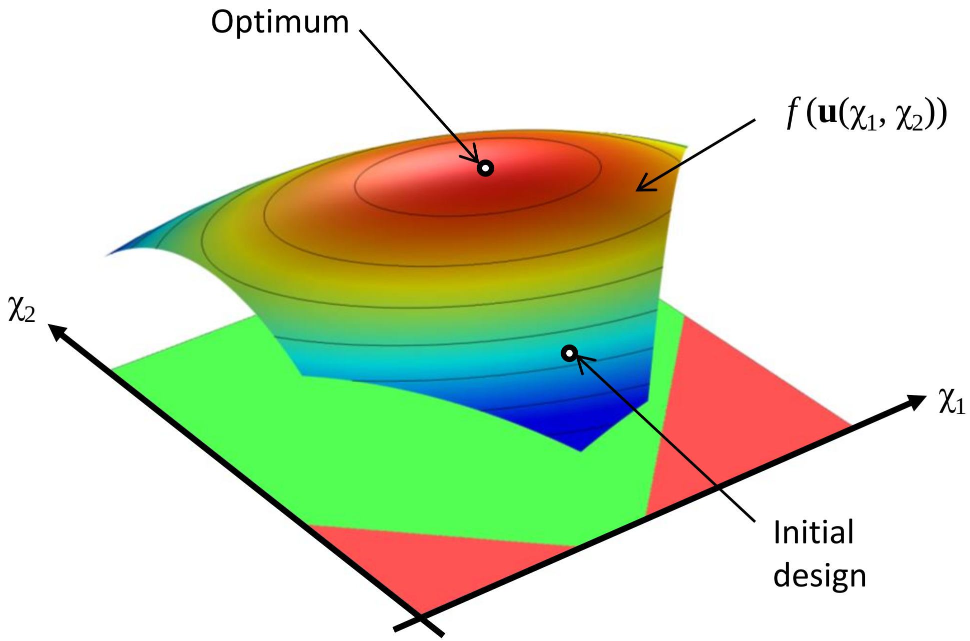
$$\text{such that :} \quad \mathbf{g}\left(\mathbf{u}(\chi)\right) = \mathbf{0}$$

General equality constraints, omezení kvality

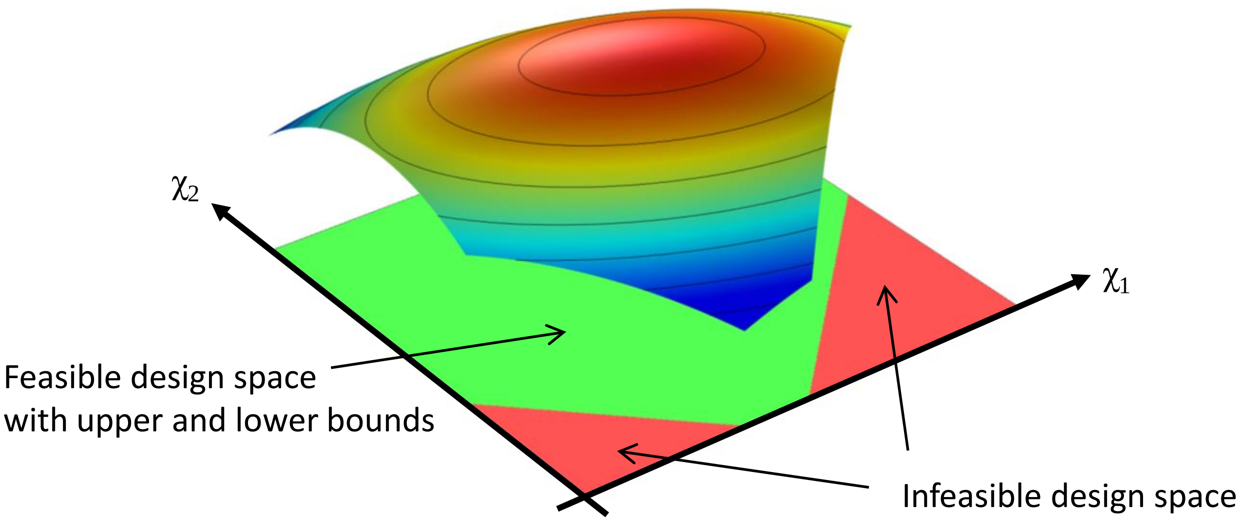
$$\mathbf{h}\left(\mathbf{u}(\chi)\right) \leq \mathbf{0}$$

General inequality constraints, omezení nekvality

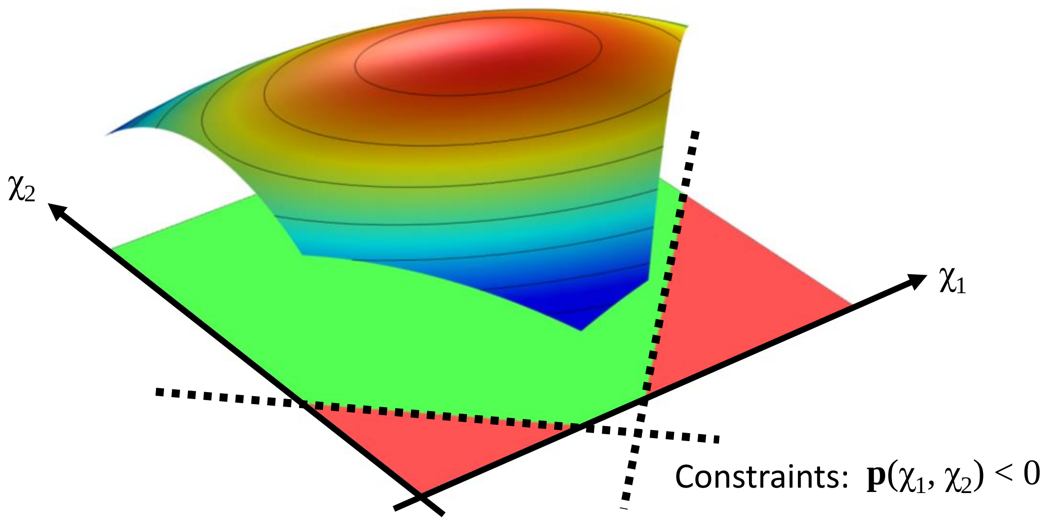
Vizualizace



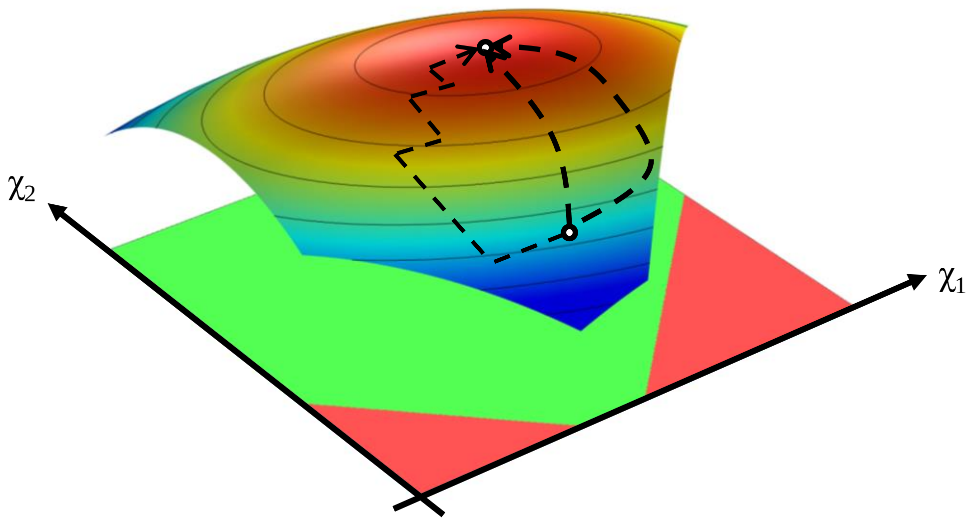
Vizualizace



Vizualizace

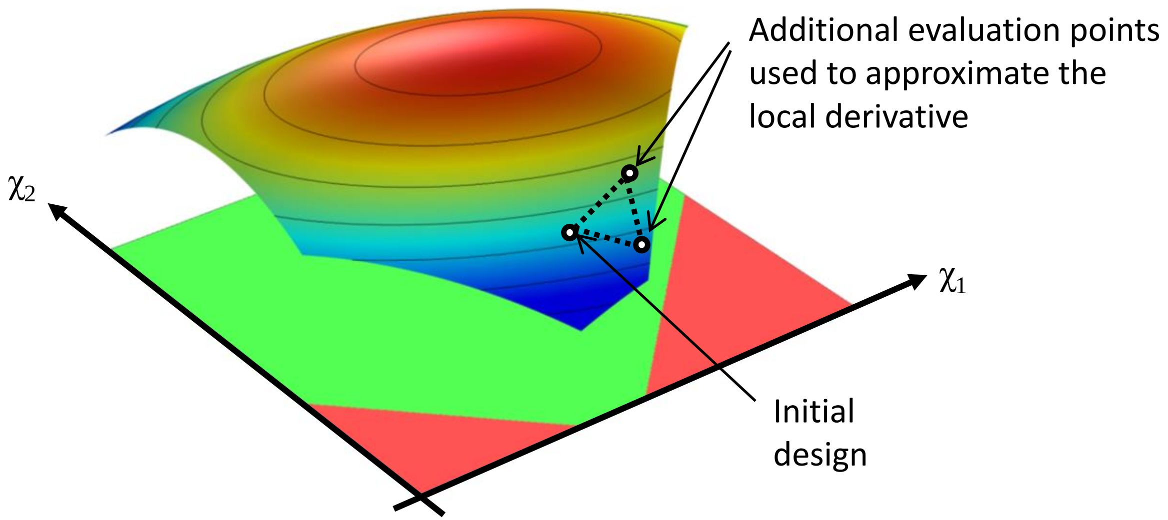


Jak se dostat k optimu?

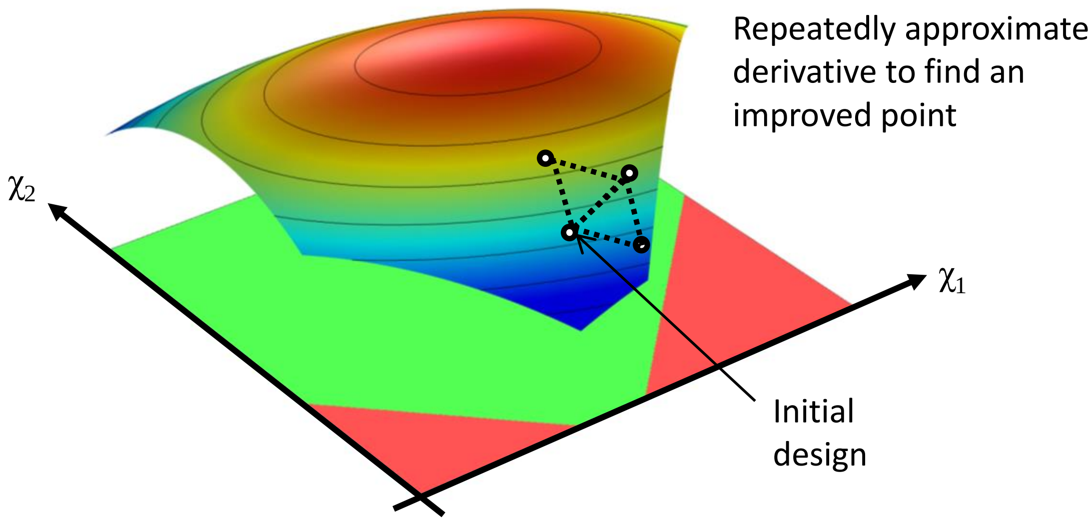


COMSOL

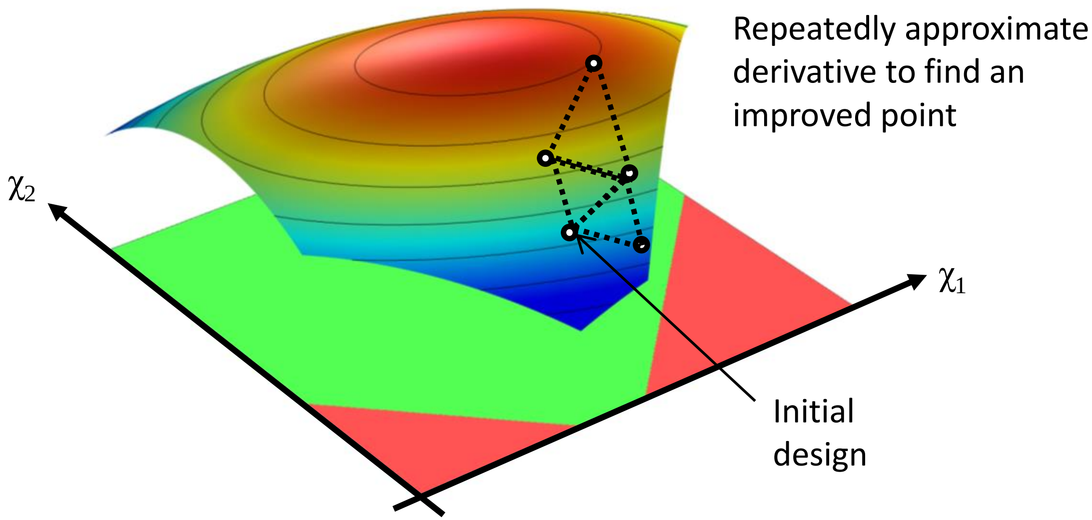
Nejjednodušší přístup: aproximace gradientu (gradient-free method)



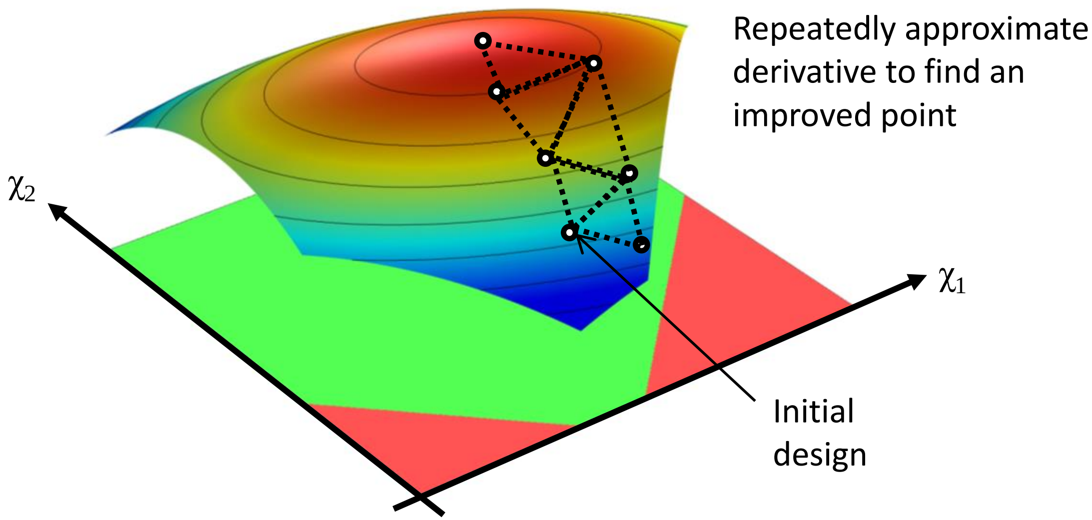
Nejjednodušší přístup: aproximace gradientu (gradient-free method)



Nejjednodušší přístup: aproximace gradientu (gradient-free method)

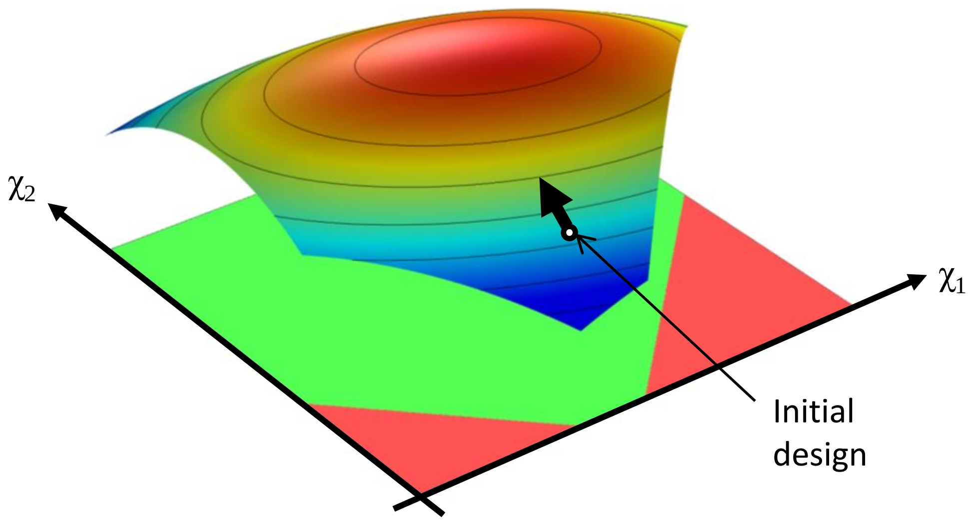


Nejjednodušší přístup: aproximace gradientu (gradient-free method)

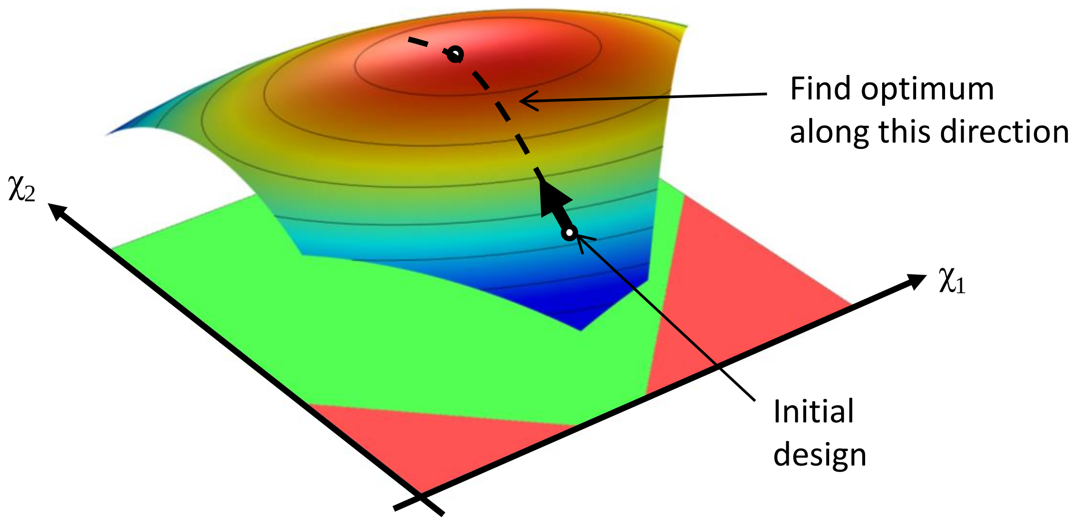


COMSOL

Rychlejší přístup: analytický výpočet gradientu (gradient-based)

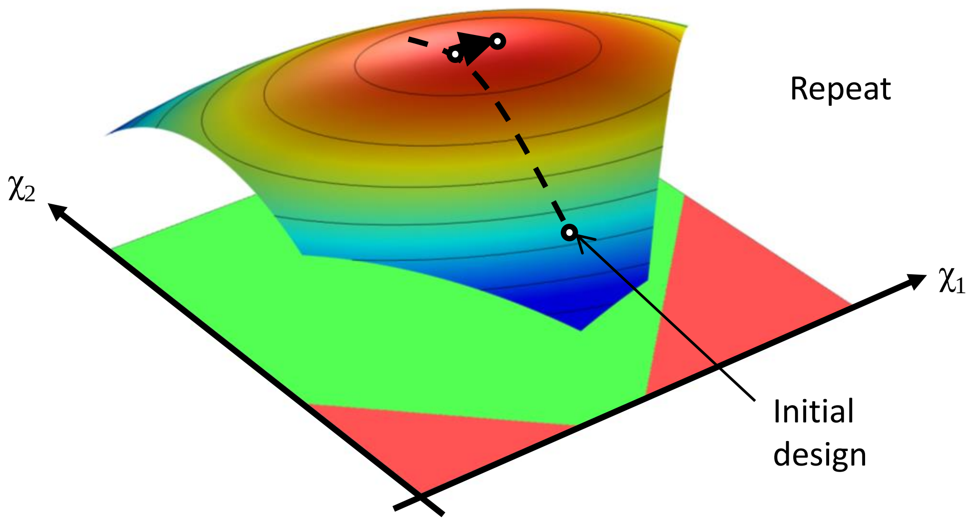


Rychlejší přístup: analytický výpočet gradientu (gradient-based)



COMSOL

Rychlejší přístup: analytický výpočet gradientu (gradient-based)



COMSOL

Adjoint metoda analytického výpočtu derivací

$$\mathbf{K}(\chi)\mathbf{u}-\mathbf{b}(\chi)=\mathbf{0}$$

Rovnice řešená MKP simulací

$$\frac{\partial}{\partial\chi}\left(\mathbf{K}(\chi)\mathbf{u}-\mathbf{b}(\chi)\right)=\mathbf{0}$$

Derivace podle návrhové proměnné χ

$$\frac{\partial\mathbf{K}(\chi)}{\partial\chi}\mathbf{u}+\mathbf{K}(\chi)\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\chi}=\frac{\partial\mathbf{b}(\chi)}{\partial\chi}$$

Rozepsáno

$$\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\chi}=\mathbf{K}^{-1}(\chi)\left(\frac{\partial\mathbf{b}(\chi)}{\partial\chi}-\frac{\partial\mathbf{K}(\chi)}{\partial\chi}\mathbf{u}\right)$$

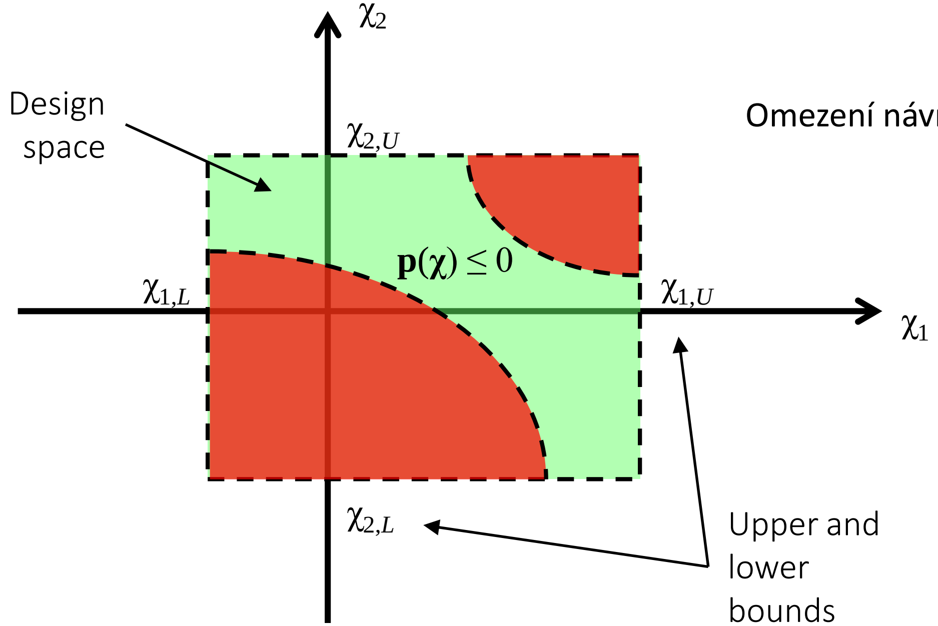
Vyjádření derivace závisle proměnné podle návrhové proměnné

$$\frac{\partial f}{\partial\chi}=\frac{\partial f}{\partial\mathbf{u}}\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\chi}$$

Pokud je cílová funkce f diferencovatelná, tak vyjádříme gradient

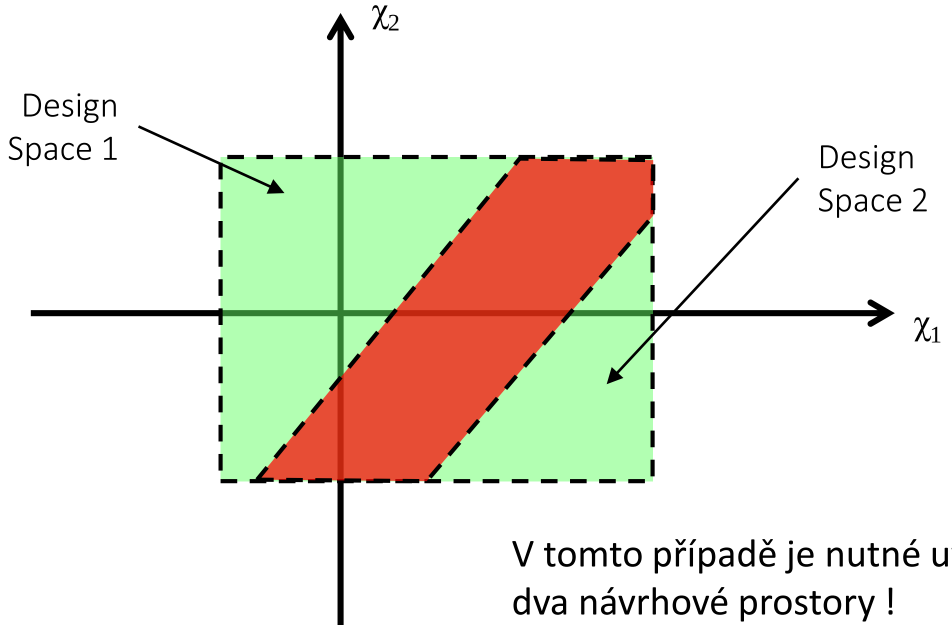
Výpočet této derivace pouze zdvojnásobí výpočetní čas – bez ohledu na počet návrhových proměnných!

Návrhový prostor a jeho omezení



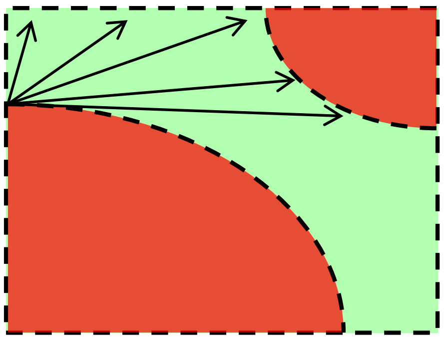
Omezení návrhového prostoru

Návrhový prostor musí být spojitý

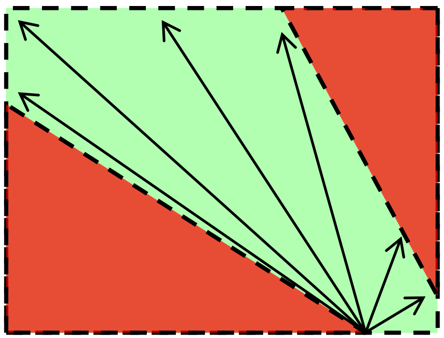


V tomto případě je nutné uvažovat dva návrhové prostory !

Pomáhá, když je návrhový prostor konvexní



Obvykle obtížnější

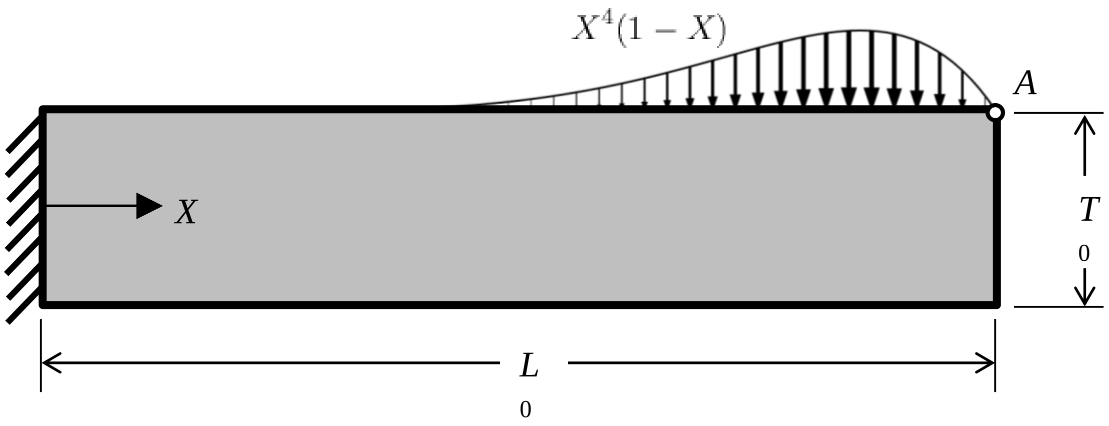


Každý bod vidí na
každý jiný bod

Co může být návrhovými proměnnými

1. Rozměr nebo i poloha hotové CAD geometrie
   – Rozměrová optimalizace
2. Tvar hranic
   – Tvarová optimalizace
3. Rozložení materiálu
   – Topologická optimalizace

Porovnání druhů optimalizace na příkladu

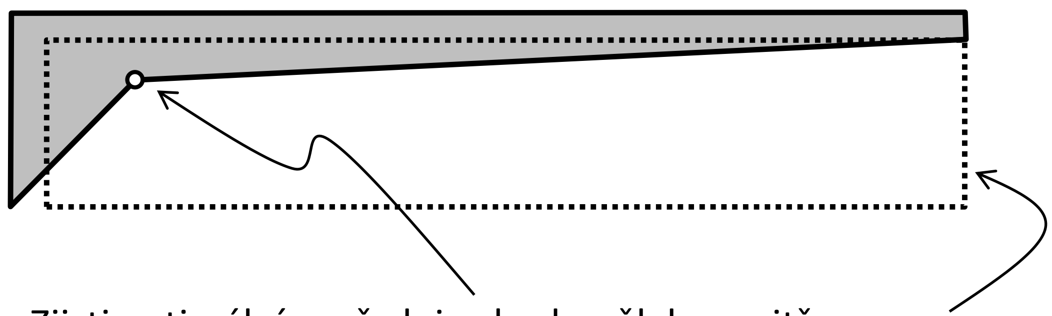


Cíl optimalizace: Minimalizovat hmotnost nosníku tak, že bod A při zatížení neklesne o více než povolenou deformaci.

1) Rozměrová optimalizace

- Pracuje s geometrií CAD modelu
- Jednoduchá na nastavení
- Vyžaduje přesíťování v každé iteraci
- Gradient-free metoda (aproximace gradientu)
- Řešením je CAD model

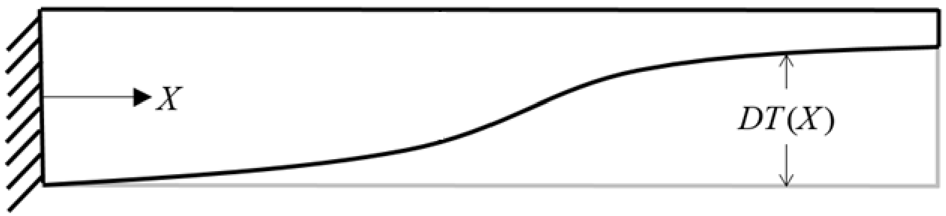
Rozměrová optimalizace: Umístění bodu



Zjisti optimální souřadnice bodu někde uvnitř návrhového prostoru.

2) Tvarová optimalizace

- Mění tvar hranic modelovaného objektu
- Složitější - vyžaduje zamyšlení nad formulací problému
- Nevyžaduje přesíťování
- Gradientní metoda



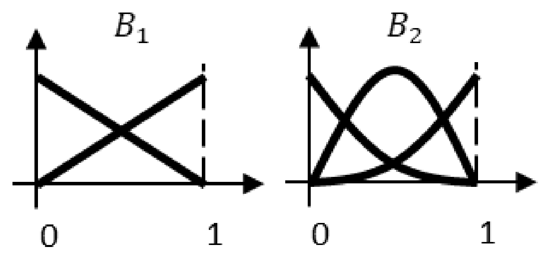
Optimalizujeme např. koeficienty Bernstainova polynomu

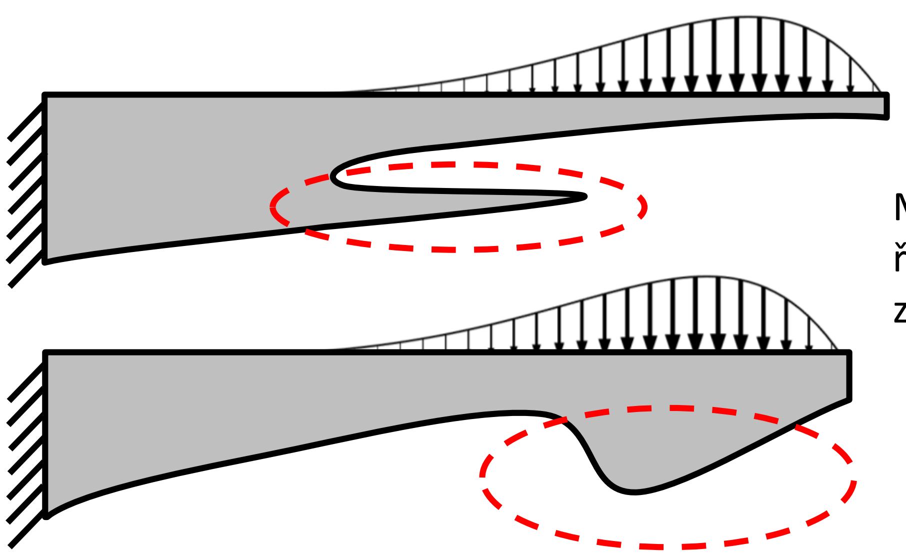
$$B_1 = C_0(1-x) + C_1(x)$$

$$B_2 = C_0(1-x)^2 + C_1 x(1-x) + C_1 x^2$$

$$\vdots$$

$$B_4 = C_0(1-x)^4 + C_1 x(1-x)^3 + C_2 x^2(1-x)^2 + C_3 x^3(1-x) + C_4 x^4$$





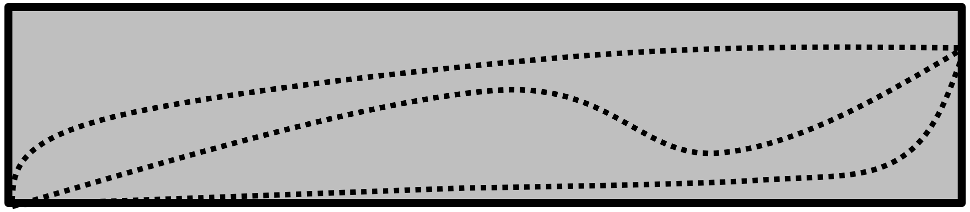
Mohou vzniknout i taková řešení nepřispívající ke zvýšení tuhosti.

Úpravou polynomu lze dospět k lepším návrhům

C_0=0

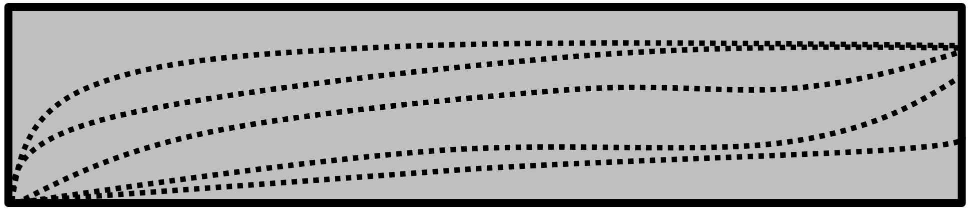
$$B_4 = C_0(1-x)^4 + C_1x(1-x)^3 + C_2x^2(1-x)^2 + C_3x^3(1-x) + C_4x^4$$

$C_4 < C_{max}$



Můžeme ještě přidat podmínku pro derivaci hledané funkce a předepsat tím, že tloušťka nosníku se bude snižovat (tj. funkce růst)

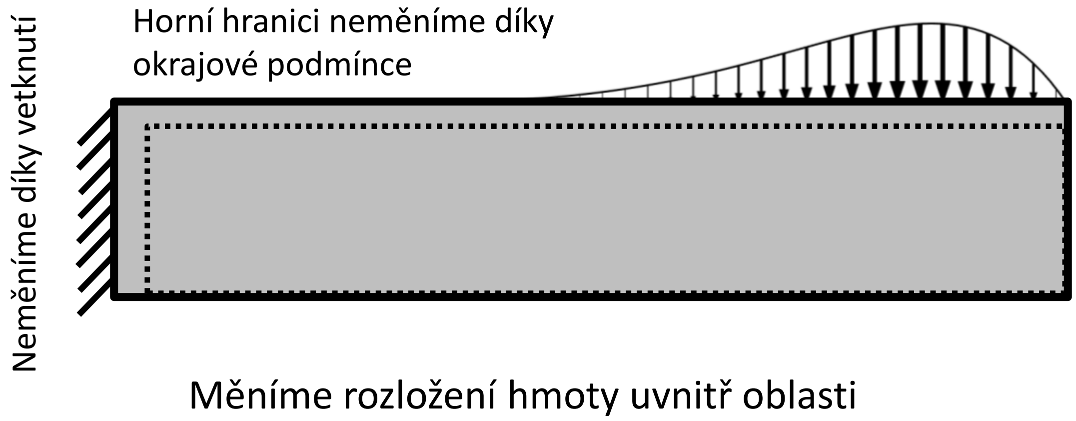
$$dB_4(X)/dX > 0$$



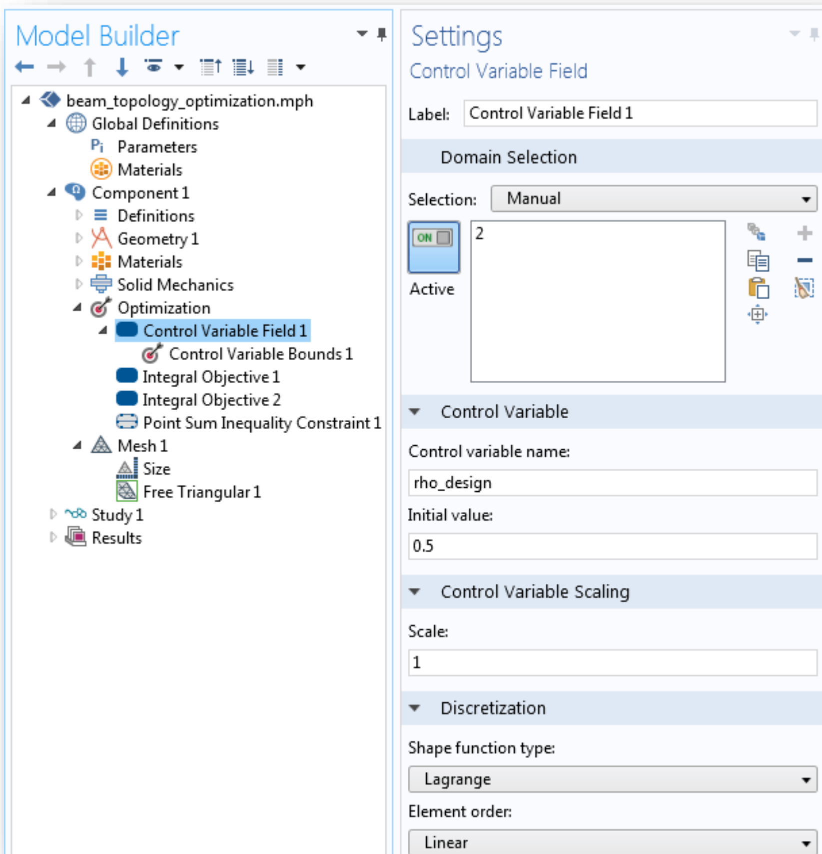
3) Topologická optimalizace

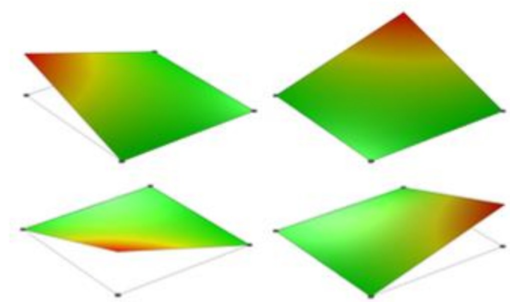
- Mění vlastnosti materiálu uvnitř oblasti
- Také vyžaduje zamyšlení nad formulací
- Nevyžaduje přesíťování
- Gradientní metoda
- Řešení nemusí být „proveditelná“
  - Kavity v pevném tělese, rozdělené části geometrie…

Topologická optimalizace



Control Variable Field – řídí distribuci materiálu

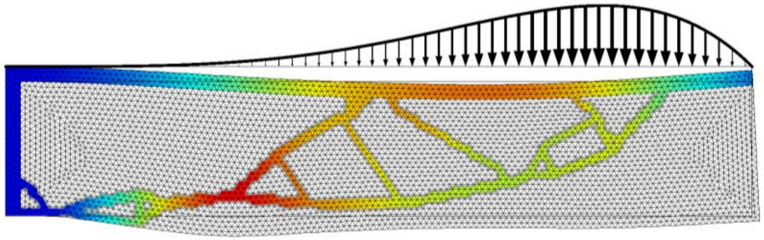




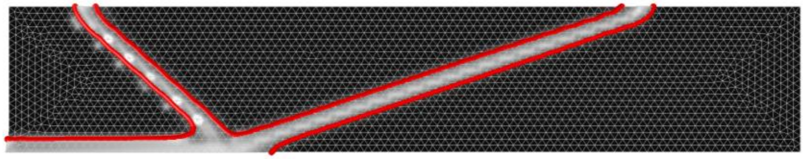
- Čtyři tvarové funkce pro čtyřstěn
- „Control Variables“ jsou definované ve vrcholech
- Nabývají hodnoty $0 < \chi < 1$

COMSOL

Můžeme najít nepraktické řešení



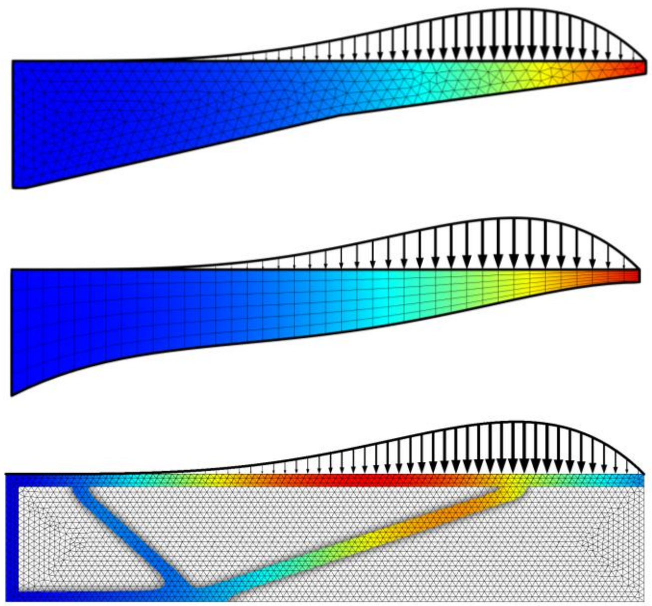
Když přidáme další omezení např. škálování pro zarovnání hodnot blízkých jedničce…



… a získáme proveditelné optimum.

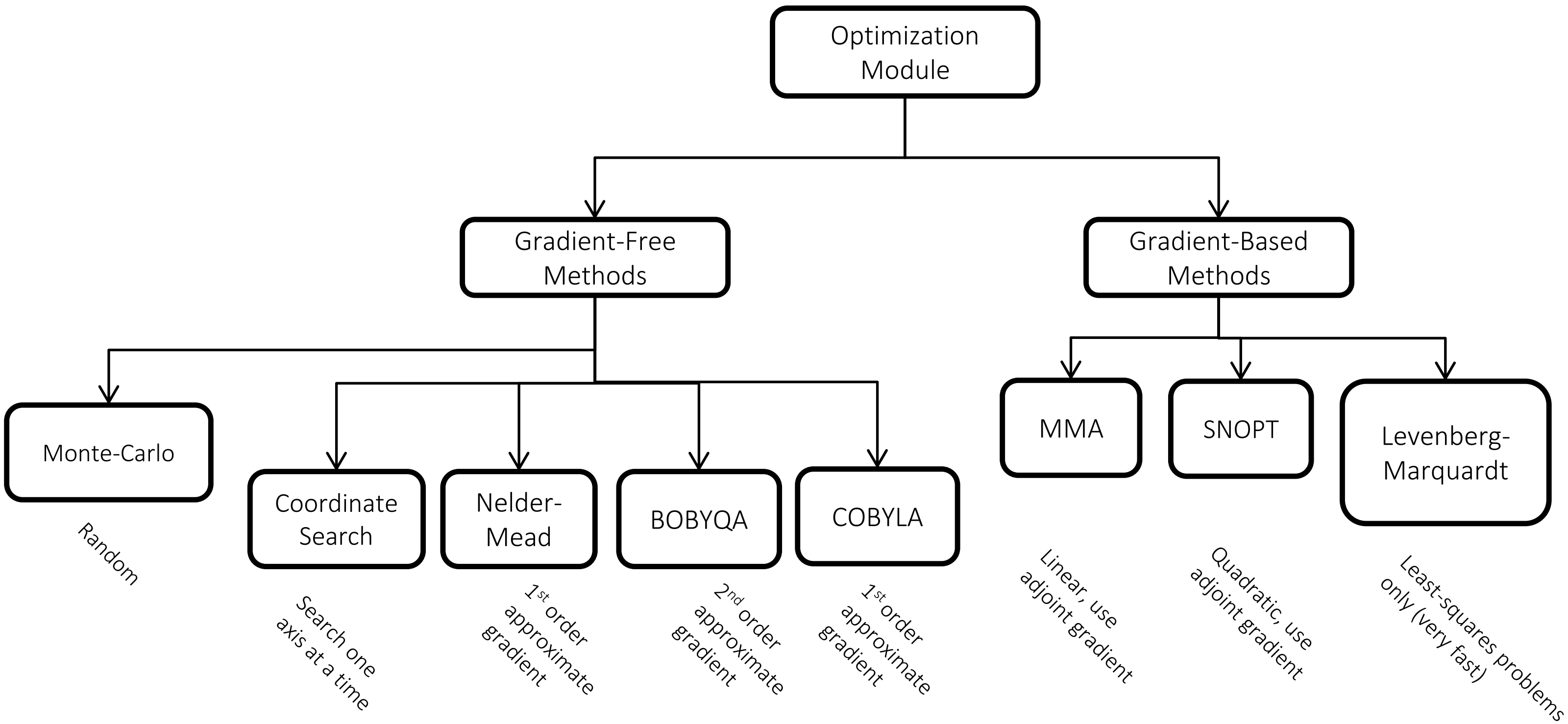
Porovnání metod

- Rozměrová (dimensional) optimalizace
  - Velmi jednoduchá
  - Vypočítá se pomaleji (gradient-free metoda)
  - Robustní
- Tvarová (shape) optimalizace
  - Může vyžadovat více nastavení
  - Vypočítá se rychleji (výpočet gradientu analyticky)
  - Vyžaduje zkušenosti a má omezení
- Topologická (topology) optimalizace
  - Může dodat velmi inovativní řešení
  - Je stále předmětem výzkumu
  - Výsledek musí být „interpretován“ do CAD
  - Vyžaduje nejvíce zkušeností



COMSOL

Dostupné optimalizační řešiče



Kdy použít „gradient-free“ metodu?

- Nediferencovatelná cílová funkce (nebo její omezení)
- Pro méně návrhových proměnných (< 10)
  - Čas narůstá exponenciálně s počtem návrhových proměnných
- Kdykoliv je jasná potřeba přesíťování

Kdy použít „gradient-based“ metodu?

- Diferencovatelná a hladká cílová funkce a její omezení
- Pro mnoho návrhových proměnných
  - Rychlost optimalizace příliš nesouvisí s počtem návrhových proměnných
  - 100 000 a více návrhových proměnných je v pohodě

Porovnání optimalizačních metod

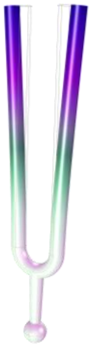
	Gradient-Free	Gradient-Based
Cílová funkce	Jakýkoliv skalární výstup	Diferencovatelná a hladká
Návrhové proměnné	Jakékoliv včetně geometrických	Jakékoliv které nevyžadují přesíťování
Umožňuje remeshing	Ano	Ne
Omezení cílové funkce	Jakákoliv omezení skalárního výstupu	Nutně diferencovatelné a hladké
Výpočetní čas	Roste exponenciálně s počtem návrhových proměnných	Není příliš závislý na počtu návrhových proměnných

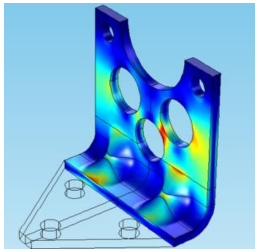
COMSOL

Zajímavé články

- http://www.comsol.com/blogs/designing-new-structures-with-shape-optimization/
- http://www.comsol.com/blogs/changing-the-dimensions-of-a-model-using-shape-optimization/
- http://www.comsol.com/blogs/finding-a-structures-best-design-with-topology-optimization/
- http://www.comsol.com/blogs/new-book-topology-optimization-electromagnetics/
- http://www.comsol.com/blogs/parameter-optimization-livelink-products/
- http://www.comsol.com/blogs/optimize-naca-airfoil-designs-with-a-simulation-app/
- http://www.comsol.com/blogs/how-to-solve-for-the-brachistochrone-curve-between-points/

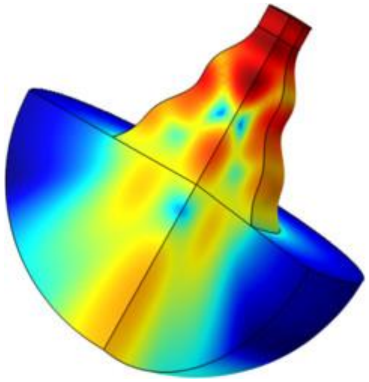
Příkady z aplikační knihovny





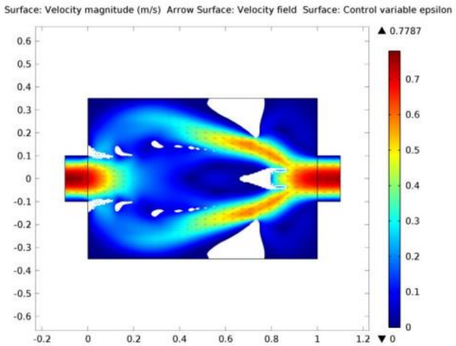
- http://www.comsol.com/model/shape-optimization-of-a-tuning-fork-8499
- http://www.comsol.com/model/multistudy-optimization-of-a-bracket-19761

Příklady z aplikační knihovny



- http://www.comsol.com/model/optimizing-the-shape-of-a-horn-4353

Příklady z aplikační knihovny



- http://www.comsol.com/model/topology-optimization-of-an-mbb-beam-7428
- http://www.comsol.com/model/optimization-of-a-tesla-microvalve-14513